Exercice 10 :

1. a) $J_0 = \int_1^e x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}$.

b) $J_1 = \int_1^e x^2 \ln x \, dx$. on pose $u(x) = \ln x$ donc $u'(x) = \frac{1}{x}$

et $v'(x) = x^2$ donc $v(x) = \frac{x^3}{3}$.

d'où $J_1 = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 \, dx = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$.

2.a) $J_{n+1} = \int_1^e x^2(\ln x)^{n+1} dx$.

on pose $u(x) = (\ln x)^{n+1}$ donc $u'(x) = \frac{1}{x}(n+1)(\ln x)^n$

et $v'(x) = x^2$ donc $v(x) = \frac{x^3}{3}$.

donc $J_{n+1} = \left[\frac{x^3}{3}(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \frac{n+1}{3}\int_1^e x^2(\ln x)^n \, dx = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}J_n$

d'où $J_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}J_n$ et par suite $3J_{n+1} + (n+1)J_n = e^3$. (E)

b) On remplace n par 1 dans (E) on obtient : $3J_2 + 2J_1 = e^3$ et par suite $J_2 = -\frac{1}{9}(e^3 + 2)$.

3.a) $J_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n dx$ donc $1 \le x \le e$ donc $\ln x \ge 0$ et $n \in IN$ d'où $J_n \ge 0$.

b) $3J_{n+1} + (n+1)J_n = e^3 \Leftrightarrow J_n = \frac{e^3}{n+1} - \frac{3}{n+1}J_{n+1}$. Or $J_n \ge 0$ pour tout $n \in IN$

donc $J_{n+1} \ge 0$ et $\frac{3}{n+1}J_{n+1} \ge 0$ d'où $J_n \le \frac{e^3}{n+1}$ pour tout $n \in IN$.

c) D'après les questions précédentes on a : $0 \le J_n \le \frac{e^3}{n+1}$. et $\frac{e^3}{n+1}$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ d'où la suite (J_n) converge vers 0 .

© najah.com®